BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2014***

RİYAZİYYAT

УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Ю.МЕХТИЕВА, З.Б.СЕИДОВ
Бакинский Государственный Университет
ibvag47@mail.ru, seyidovzahid@mail.ru

В работе численным методом разложения [2] исследуются двухточечные краевые задачи, а также краевые задачи с интегральными условиями для системы уравнений. Для этих задач строится явная разностная схема [1] и находятся значения решения и значения производных в узловых точках сетки.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, метод разложения, узловые точки.

I. Сначала рассмотрим двухточечную краевую задачу вида

$$\begin{gathered} y''' = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x)z + f(x), \ (0 \le x \le T) \\ z'' = e(x)z' + g(x)z + \tau(x)y + \varphi(x), \\ y(0) = \gamma_1, \ y'(T) = \gamma_2, \ y''(T) = \gamma_3, \ z(0) = \gamma_4, \ z'(T) = \gamma_5. \end{gathered} \tag{1}$$

Предположим, что краевая задача (1) имеет единственное решение.

Введем функции $y' = V, V' = u, z' = W$.

Тогда краевая задача (1) сводится к краевой задаче для системы уравнений I порядка.

$$\begin{gathered} y' = V, V' = u, z' = W, \\ u' = a(x)u + b(x)V + c(x)y + d(x)z + f(x) \ \ (0 \le x \le T), \\ W' = e(x)W + g(x)z + \tau(x)y + \varphi(x), \\ y(0) = \gamma_1, V(T) = \gamma_2, u(T) = \gamma_3, z(0) = \gamma_4, W(T) = \gamma_5. \end{gathered}$$

Разобьем отрезок $[0,T]$ на N равных частей с шагом $h = \dfrac{T}{N}$ и составим разностную схему вида

$$\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + hV_i,\; V_{i+1} = V_i + hu_i,\; z_{i+1} = z_i + hW_i, \\
&u_{i+1} = (1 + ha_i)u_i + hb_i V_i + hc_i y_i + hd_i z_i + hf_i, \qquad (i = \overline{0, N-1}), \\
&W_{i+1} = (1 + ha_i)W_i + hg_i z_i + h\tau_i y_i + h\varphi_i, \\
&y_0 = \gamma_1,\;\; V_N = \gamma_2,\;\; u_N = \gamma_3,\;\; z_0 = \gamma_4,\;\; W_N = \gamma_5.
\end{aligned} \tag{2}$$

В этой разностной задаче первоначальными неизвестными являются V_0, u_0, W_0.

Для определения этих неизвестных сначала рассмотрим разложение вида

$$V_i = R_i y_i + p_i u_i + Q_i z_i + E_i W_i + S_i. \tag{3}$$

В равенстве (3) заменим i на $i+1$ и используем равенства (2). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
&R_i y_i + p_i u_i + Q_i z_i + E_i W_i + S_i + hu_i = \\
&= R_{i+1} y_i + (hR_{i+1} + hp_{i+1} b_i)(R_i y_i + p_i u_i + Q_i z_i + E_i W_i + S_i) + \\
&+ p_{i+1}(1 + ha_i)u_i + hp_{i+1} c_i y_i + hp_{i+1} d_i z_i + hp_{i+1} f_i + Q_{i+1} z_i + hQ_{i+1} W_i + \\
&+ E_{i+1}(1 + he_i)W_i + hE_{i+1} g_i z_i + hE_{i+1}\tau_i y_i + hE_{i+1} y_i + S_{i+1}, \\
&(R_i - R_{i+1} - (hR_{i+1} + hp_{i+1} b_i)R_i - hp_{i+1} c_i - hE_{i+1}\tau_i)y_i + \\
&(p_i + h - (hR_{i+1} + hp_{i+1} b_i)p_i - p_{i+1}(1 + ha_i))u_i + \\
&+ (Q_i - (hR_{i+1} + hp_{i+1} b_i)Q_i - hp_{i+1} d_i - Q_{i+1} - hE_{i+1} g_i)z_i + \\
&+ (E_i - (hR_{i+1} + hp_{i+1} b_i)E_i - hQ_{i+1} - E_{i+1}(1 + he_i))W_i + S_i = \\
&= S_{i+1} + hE_{i+1}\varphi_i + (hR_{i+1} + hp_{i+1} b_i)S_i.
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при y_i, u_i, z_i, W_i обращались в нуль. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&R_i = \mu_i^{-1}(R_{i+1} + hp_{i+1} c_i + hE_{i+1}\tau_i), \\
&p_i = \mu_i^{-1}(-h + p_{i+1}(1 + ha_i)), \\
&Q_i = \mu_i^{-1}(hp_{i+1} d_i + Q_{i+1} + hE_{i+1} g_i), \qquad (i = 0, N-1) \\
&E_i = \mu_i^{-1}(hQ_{i+1} + E_{i+1}(1 + he_i)), \\
&S_i = \mu_i^{-1}(S_{i+1} + hE_{i+1}\varphi_i + hp_{i+1} f_i), \\
&\mu_i = 1 - hR_{i+1} - hp_{i+1} b_i.
\end{aligned} \tag{4}$$

В разложении (3) положим $i = N$ и учтем равенство $V_N = \gamma_2$. Тогда будем иметь

$$R_N = p_N = Q_N = E_N = 0,\ S_N = \gamma_2.$$

Учитывая эти значения коэффициентов из равенства (4) определяются

$$R_{N-1}, p_{N-1}, Q_{N-1}, E_{N-1}, S_{N-1}, ..., R_0, p_0, Q_0, E_0, S_0$$

и составляется уравнение относительно неизвестных V_0, u_0, W_0:

$$V_0 - p_0 u_0 - E_0 W_0 = R_0 \gamma_1 + Q_0 \gamma_4 + S_0.$$

Рассматривая разложения вида

$$u_i = R_i' y_i + p_i' v_i + Q_i' z_i + E_i' W_i + S_i',$$
$$W_i = R_i'' y_i + p_i'' V_i + Q_i'' u_i + E_i'' z_i + S_i''$$

можно составить еще два уравнения относительно V_0, u_0, W_0.

Таким образом, первоначальные неизвестные V_0, u_0, W_0 определяются из системы уравнений

$$V_0 - p_0 u_0 - E_0 W_0 = R_0 \gamma_1 + Q_0 \gamma_4 + S_0,$$
$$u_0 - p_0' V_0 - Q_0' \gamma_4 - E_0' W_0 = R_0' \gamma_1 + Q_0' \gamma_4 + S_0',$$
$$W_0 - p_0'' V_0 - Q_0'' u_0 = R_0'' \gamma_1 + E_0'' \gamma_4 + S_0''.$$

Значения решения краевой задачи (1) и значения ее производных в узловых точках находятся по разностной схеме (2).

II. Теперь рассмотрим краевую задачу с интегральными условиями

$$y''' = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x)z + f(x),$$
$$z'' = e(x)z' + g(x)z + \tau(x)y + \varphi(x),$$
$$y(0) = \gamma_1,\ \int_0^T \alpha(s)y'(s)ds = \gamma_2,\ \int_0^T \beta(s)y''(s)ds = \gamma_3,\ z(0) = \gamma_4,$$
$$\int_0^T \theta(s)z'(s)ds = \gamma_5.$$

Введем функции

$$y' = V,\ V' = u,\ z' = W,$$
$$\xi(x) = \int_0^x \alpha(s)V(s)ds,\ \eta(x) = \int_0^x \beta(s)u(s)ds,\ \sigma(x) = \int_0^x \theta(s)W(s)ds.$$

Тогда краевая задача (5) сводится к краевой задаче для системы уравнений I порядка.

Разностная схема для последней задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
& y_{i+1} = y_i + hV_i,\ V_{i+1} = V_i + hu_i,\ z_{i+1} = z_i + hW_i, \\
& u_{i+1} = (1 + ha_i)u_i + hb_iV_i + hc_iy_i + hd_iz_i + hf_i, \\
& W_{i+1} = (1 + he_i)W_i + hg_iz_i + h\tau_iy_i + hd_iz_i + h\varphi_i, \\
& \xi_{i+1} = \xi_i + h\alpha_iV_i, \eta_{i+1} = \eta_i + h\beta_iu_i, \\
& \sigma_{i+1} = \sigma_i + h\theta_iW_i, \\
& y_0 = \gamma_1, z_0 = \gamma_4,\ \xi_0 = \eta_0 = \sigma_0 = 0, \\
& \xi_N = \gamma_2,\ \eta_N = \gamma_3,\ \sigma_N = \gamma_5.
\end{aligned}
$$

В этой разностной задаче первоначальными неизвестными являются V_0, u_0, W_0. Для определения этих неизвестных исследуются разложения вида

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= R_iy_i + p_iV_i + Q_i\,u_i + E_iW_i + S_i, \\
\eta_i &= R_i'y_i + p_i'V_i + Q_i'\,u_i + E_i'W_i + S_i', \\
\sigma_i &= R_i''y_i + p_i''V_i + Q_i''u_i + E_i''W_i + S_i''.
\end{aligned}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы, М.: Наука, 1989, 425 с.
2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974, 186 с.
3. Мехтиева Г.Ю., Сеидов З.Б. Численное решение краевых задач для системы функционально-дифференциальных уравнений. Вестник БУ, серия физ.-мат. наук, №3, 2012, с.3.

XÜSUSİ NÖV TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

Q.Y.MEHDİYEVA, Z.B.SEYİDOV

XÜLASƏ

Məqalədə xüsusi növ tənliklər sistemi üçün ikinöqtəli sərhəd məsələsinin ədədi həlli öyrənilir. Sonra inteqral şərtli sərhəd məsələlərini tədqiq etdikdə ikinöqtəli sərhəd məsələsi alınır.

Açar sözlər: ikinöqtəli sərhəd məsələsi, ayırma üsulu, düyün nöqtələri.

THE NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE SPECIAL TYPE SYSTEM OF EQUATIONS

G.Y.MEHDIYEVA, Z.B.SEYIDOV

SUMMARY

In this paper the numerical solution of the two-point boundary value problem for the special type system of equations is studied. Further, the investigation of the boundary value problem with integral boundary conditions is reduced to a two-point boundary value problem.

Key words: two-point boundary value problem, expansion method, vode points.

Поступило в редакцию: 30.01.2014 г.
Подписано к печати: 04.04.2014 г.